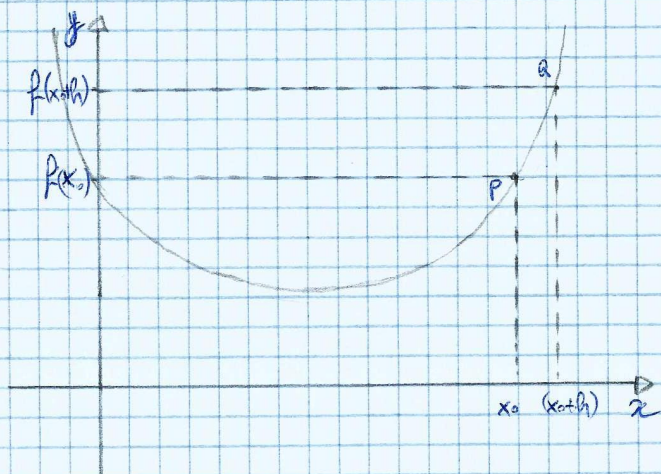


La derivata prima

Nel programma del quinto anno di corso che qui iniziamo andremo a confluire tutte le conoscenze che abbiamo finora studiato.

Cominceremo subito con la derivata prima di una funzione costante, rendo il grafico seguente:



Notiamo che aggiungendo un intervallo h alla variabile indipendente x_0 , ne risente ovviamente anche l'immagine della funzione, cioè la variabile dipendente, che passa da $f(x_0)$ a $f(x_0+h)$. Man mano che h si avvicina a 0, la distanza tende a zero. Di conseguenza, la $f(x_0+h)$ diviene sempre più simile alla $f(x_0)$, perciò la differenza tra $f(x_0+h)$ e $f(x_0)$ tende anch'essa a zero al tendere di h a zero.

Si definisce allora derivata prima di una funzione in un suo punto x_0 il limite, se esiste reale e finito, del rapporto incrementale tra l'incremento della variabile dipendente e quello della variabile indipendente al tendere di quest'ultimo a zero. In simboli:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \text{ reale e finito, oppure } \frac{df}{dx} \text{ (o } \frac{df}{dx}(x_0) \text{) nel punto } x_0$$

Effettivamente usavamo già in precedenza il rapporto tra incrementi. In fisica, ad esempio, lo si usa nel calcolo della velocità media: si divide lo spazio percorso (che è la differenza tra spazio finale e iniziale, cioè l'incremento di spazio percorso) per l'intervallo di tempo impiegato a percorrerlo. Per $h \rightarrow 0$, si ottiene la velocità istantanea, che potremmo anche modo di incontrare.

La derivata è anche utile in medicina, ad esempio in pe,

diabro: il pediatra controlla il peso e l'altezza del neonato a brevi intervalli di tempo, confrontando i risultati ottenuti con quelli di una tabella indicativa delle caratteristiche del bambino in funzione dei giorni trascorsi dalla nascita.

Altre applicazioni pratiche della derivata prima si hanno nelle variazioni economiche della borsa e nello studio chimico della cinetica di reazione (ad esempio di reazioni catalizzate).

In Matematica consideriamo invece il concetto oggettivo di derivata, cioè indipendentemente dall'assegnazione di grandezze fisiche particolari agli assi del piano cartesiano.

Derivate di alcune funzioni e significato geometrico di derivata
Usando la definizione di derivata, calcoliamo le derivate nel punto x_0 di alcune funzioni che ben conosciamo:

- derivata nel punto x_0 della parabola $f(x) = ax^2 + bx + c$:

x	y
x_0	$ax_0^2 + bx_0 + c$
$x_0 + h$	$a(x_0 + h)^2 + b(x_0 + h) + c$

$$\begin{aligned}
 f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x_0 + h)^2 + b(x_0 + h) + c - ax_0^2 - bx_0 - c}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ax_0^2 + 2ax_0h + ah^2 + bx_0 + bh + c - ax_0^2 - bx_0 - c}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2ax_0 + ah + b)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2ax_0 + ah + b) = \\
 &= 2ax_0 + b
 \end{aligned}$$

Dunque abbiamo scoperto che la derivata di una parabola in un suo punto x_0 è $f'(x_0) = 2ax_0 + b$. Sapremo che, come già era stato evidenziato nel secondo esempio utile del capitolo **II.5** della **PARTI PRIMA** del $\mathbb{I}$ $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$, che la derivata prima di una funzione (in questo caso una parabola) in un suo punto x_0 è il coefficiente angolare della retta tangente alla funzione in quel punto.

Effettivamente non abbiamo usato altro che le formule che usavamo per trovare la tangente in un punto ad una curva (e che era messa a sistema all'equazione della curva stessa, proprio per $\Delta = 0$ e scoprire il valore di m):

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad \text{da cui} \quad m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \quad \text{Formula della derivata.}$$

derivata nel punto x_0 della retta $f(x) = K$ ($K \in \mathbb{R}$). Essendo la retta parallela all'asse x , essa ha coefficiente angolare pari a zero. La derivata ha dunque valore zero. Infatti:

x	y
x_0	K
x_0+h	K

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{K-K}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

La derivata di una costante ha dunque valore zero; derivata nel punto x_0 della retta $f(x) = x$:

x	y
x_0	x_0
x_0+h	x_0+h

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0+h-x_0}{h} = 1$$

La retta $y = x$ è la bisettrice del I e II quadrante, che ha coefficiente angolare pari a 1. La funzione $f(x) = x$ è detta anche funzione identica;

derivata nei punti x_0 delle funzioni $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ e $h(x) = x^4$:

x	y
x_0	x_0^2
x_0+h	$(x_0+h)^2$

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2hx_0 + h^2 - x_0^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x_0 + h)}{h} = 2x_0 \end{aligned}$$

x	y
x_0	x_0^3
x_0+h	$(x_0+h)^3$

$$\begin{aligned} g'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0+h)^3 - x_0^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^3 + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3 - x_0^3}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x_0^2 + 3x_0h + h^2)}{h} = 3x_0^2 \end{aligned}$$

x	y
x_0	x_0^4
x_0+h	$(x_0+h)^4$

$$\begin{aligned} h'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0+h)^4 - x_0^4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0^2 + 2x_0h + h^2)^2 - x_0^4}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^4 + 4x_0^3h + 6x_0^2h^2 + 4x_0h^3 + h^4 - x_0^4}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4x_0^3 + 6x_0^2h + 4x_0h^2 + h^3)}{h} = 4x_0^3 \end{aligned}$$

Abbiamo scoperto che la derivata prima della potenza con esponente intero di x è pari al prodotto tra l'esponente della x e la x con esponente cui viene sottratta

una unita rispetto a quello che aveva inizialmente. In formule:

dato $f(x) = x^m$ si ha $f'(x) = m x^{m-1}$

derivata nel punto x_0 della funzione $f(x) = \sqrt{x}$:

x	y
x_0	$\sqrt{x_0}$
x_0+h	$\sqrt{x_0+h}$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}}{h} = \frac{\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0+h - x_0}{h(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Anche in questo caso abbiamo trovato il coefficiente m della tangente a $f(x)$ in x_0 . Ma proviamo a calcolare le derivate di altre radici di x per estrarre la regola generale;

derivata nel punto x_0 di $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e $g(x) = \sqrt[4]{x}$

x	y
x_0	$\sqrt[3]{x_0}$
x_0+h	$\sqrt[3]{x_0+h}$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x_0+h} - \sqrt[3]{x_0}}{h} = \frac{\sqrt[3]{(x_0+h)^2} + \sqrt[3]{x_0+h} \cdot \sqrt[3]{x_0} + \sqrt[3]{x_0^2}}{\sqrt[3]{(x_0+h)^2} + \sqrt[3]{x_0+h} \cdot \sqrt[3]{x_0} + \sqrt[3]{x_0^2}} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0+h - x_0}{h(\sqrt[3]{(x_0+h)^2} + \sqrt[3]{x_0+h} \cdot \sqrt[3]{x_0} + \sqrt[3]{x_0^2})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt[3]{(x_0+h)^2} + \sqrt[3]{x_0+h} \cdot \sqrt[3]{x_0} + \sqrt[3]{x_0^2})} =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}}$$

x	y
x_0	$\sqrt[4]{x_0}$
x_0+h	$\sqrt[4]{(x_0+h)^4}$

$$g'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{x_0+h} - \sqrt[4]{x_0}}{h} = \frac{\sqrt[4]{(x_0+h)^3} + \sqrt[4]{(x_0+h)^2} \cdot \sqrt[4]{x_0+h} + \sqrt[4]{(x_0+h)} \cdot \sqrt[4]{x_0^2} + \sqrt[4]{x_0^3}}{\sqrt[4]{(x_0+h)^3} + \sqrt[4]{(x_0+h)^2} \cdot \sqrt[4]{x_0+h} + \sqrt[4]{(x_0+h)} \cdot \sqrt[4]{x_0^2} + \sqrt[4]{x_0^3}} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0+h)^3 - x_0^3}{h(\sqrt[4]{(x_0+h)^3} + \sqrt[4]{(x_0+h)^2} \cdot \sqrt[4]{x_0+h} + \sqrt[4]{(x_0+h)} \cdot \sqrt[4]{x_0^2} + \sqrt[4]{x_0^3})} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^3 + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3 - x_0^3}{h(\sqrt[4]{(x_0+h)^3} + \sqrt[4]{(x_0+h)^2} \cdot \sqrt[4]{x_0+h} + \sqrt[4]{(x_0+h)} \cdot \sqrt[4]{x_0^2} + \sqrt[4]{x_0^3})} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3}{h(\sqrt[4]{(x_0+h)^3} + \sqrt[4]{(x_0+h)^2} \cdot \sqrt[4]{x_0+h} + \sqrt[4]{(x_0+h)} \cdot \sqrt[4]{x_0^2} + \sqrt[4]{x_0^3})} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x_0^3}}$$

Allora, in generale:

dato $f(x) = \sqrt[n]{x}$ si ha $f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

derivata nel punto x_0 della funzione $f(x) = \sin x$:

x	y
x_0	$\sin x_0$
x_0+h	$\sin(x_0+h)$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h - \sin x_0}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x_0 (\cos h - 1) + \cos x_0 \sin h}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin x_0 \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x_0 \frac{\sin h}{h} \right) = \cos x_0$$

Per trovare il coefficiente angolare della retta tangente nel punto x_0 a $\cos x$ è pari al coseno di x_0 stesso;
 derivato nel punto x_0 della funzione $f(x) = \cos x$:

x	y
x_0	$\cos x_0$
x_0+h	$\cos(x_0+h)$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x_0+h) - \cos x_0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x_0 \cos h - \sin x_0 \sin h - \cos x_0}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x_0 (\cos h - 1) - \sin x_0 \sin h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\cos x_0 \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x_0 \cdot \frac{\sin h}{h} \right) = -\sin x_0$$

Il coefficiente angolare della retta tangente in x_0 a $\cos x$ è $-\sin x_0$,
 e pari a $-\sin x_0$;

derivato nel punto x_0 della funzione esponenziale, $f(x) = e^x$:

x	y
x_0	e^{x_0}
x_0+h	e^{x_0+h}

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0}(e^h - 1)}{h} = e^{x_0}$$

derivato nei punti x_0 delle funzioni $f(x) = e^{2x}$ e $g(x) = e^{3x}$:

x	y
x_0	e^{2x_0}
x_0+h	$e^{2(x_0+h)}$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{2x_0+2h} - e^{2x_0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{2x_0}(e^{2h} - 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} e^{2x_0} \cdot \frac{e^{2h} - 1}{h} = 2e^{2x_0}$$

x	y
x_0	e^{3x_0}
x_0+h	$e^{3(x_0+h)}$

$$g'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{3x_0+3h} - e^{3x_0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{3x_0}(e^{3h} - 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} e^{3x_0} \cdot \frac{e^{3h} - 1}{h} = 3e^{3x_0}$$

Allora, in generale:

dato $f(x) = e^{mx}$ si ha $f'(x) = m e^{mx}$

derivato nel punto x_0 della funzione $f(x) = a^x$

x	y
x_0	a^{x_0}
x_0+h	a^{x_0+h}

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x_0+h} - a^{x_0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x_0}(a^h - 1)}{h} = a^{x_0} \ln a$$

- derivata nel punto x_0 della funzione $f(x) = \ln x$:

x	y
x_0	$\ln x_0$
x_0+h	$\ln(x_0+h)$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x_0+h) - \ln x_0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right)}{\frac{1}{h}} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \ln\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \ln\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right)^{\frac{1}{h}}$$

Chiamiamo $\frac{1}{h} = t$; se $h \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$; perciò:

$$f'(x_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{x_0+1}{x_0}\right)^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln\left[\left(1 + \frac{1}{tx_0}\right)^{tx_0}\right]^{\frac{1}{x_0}} = \ln e^{\frac{1}{x_0}} =$$

$$= \frac{1}{x_0}$$

se avessimo avuto $g(x) = \ln 2x$, $h(x) = \ln 3x$, ecc. il risultato sarebbe stato identico perché il coefficiente 2 e 3 si cancellano semplicemente nel rapporto che sfrutta la proprietà dei logaritmi $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$. Infatti:

$$g'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln[2(x_0+h)] - \ln 2x_0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{2(x_0+h)}{2x_0}\right)}{\frac{1}{h}} = \frac{1}{x_0}$$

$$h'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln[3(x_0+h)] - \ln 3x_0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{3(x_0+h)}{3x_0}\right)}{\frac{1}{h}} = \frac{1}{x_0}$$

- derivata nel punto x_0 della funzione $f(x) = \log_a x$:

x	y
x_0	$\log_a x_0$
x_0+h	$\log_a(x_0+h)$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x_0+h) - \log_a x_0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right)}{\frac{1}{h}} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \log_a\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \log_a\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right)^{\frac{1}{h}}$$

Chiamiamo $\frac{1}{h} = t$; se $h \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$; perciò:

$$f'(x_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \log_a\left(\frac{x_0+1}{x_0}\right)^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \log_a\left[\left(1 + \frac{1}{tx_0}\right)^{tx_0}\right]^{\frac{1}{x_0}} = \log_a e^{\frac{1}{x_0}} =$$

$$= \frac{1}{x_0} \log_a e$$

Regole di derivazione

Calcoliamo col metodo tradizionale la derivata prima della seguente funzione $f(x) = x \sin x$:

x	y
x_0	$x_0 \sin x_0$
$x_0 + h$	$(x_0 + h) \sin(x_0 + h)$

$$\begin{aligned}
 f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h) \sin(x_0 + h) - x_0 \sin x_0}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)(\sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h) - x_0 \sin x_0}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0 \sin x_0 \cos h + x_0 \cos x_0 \sin h + h \sin x_0 \cos h + h \cos x_0 \sin h - x_0 \sin x_0}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h x_0 \cos x_0 (\cos h - 1) + h \cos x_0 \sin h (x_0 + h) + h \sin x_0 \cos h}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[x_0 \cos x_0 \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) + \cos x_0 \frac{\sin h}{h} (x_0 + h) + \sin x_0 \cos h \right] = \\
 &= x_0 \cos x_0 + \sin x_0
 \end{aligned}$$

Il tempo che è necessario impiegare per svolgere col metodo tradizionale il calcolo della derivata prima è davvero molto. Non possiamo utilizzare tutte le volte gran parte del nostro tempo nel calcolo tradizionale. Esistono però delle regole di derivazione che permettono di ottenere direttamente la derivata prima. Si osservano le funzioni elementari da cui è costituita la funzione in analisi e si applica una formula "precompilata" e si sommano i risultati al rapporto di somma algebrica, prodotto o quoziente che si ha tra le funzioni elementari stesse.

Derivate delle somme di due (o più) funzioni

Dato $f(x) = g(x) + h(x)$, calcoliamo la derivata nel punto x_0 :

x	y
x_0	$g(x_0) + h(x_0)$
$x_0 + h$	$g(x_0 + h) + h(x_0 + h)$

$$\begin{aligned}
 f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[g(x_0 + h) + h(x_0 + h)] - [g(x_0) + h(x_0)]}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0) + h(x_0 + h) - h(x_0)}{h}
 \end{aligned}$$

Sfruttiamo a questo punto il teorema (non ancora dimostrato) secondo cui:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [g(x) + h(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} [g(x)] + \lim_{x \rightarrow x_0} [h(x)].$$

Pertanto:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(x_0 + h) - h(x_0)}{h} = g'(x_0) + h'(x_0)$$

Abbiamo scoperto che la somma dei due limiti è la somma delle derivate delle singole funzioni! Pertanto, la derivata

della somma di due o più funzioni è pari alla somma delle derivate delle singole funzioni:

$$D[g(x) + l(x)] = D[g(x)] + D[l(x)]$$

Il termine "somma" va inteso come "somma algebrica", che vale anche per le differenze di due funzioni.

Esempi

Ecco un esercizio di applicazione delle regole

$$D[3 + x + \cos x] = D[3] + D[x] + D[\cos x] = 0 + 1 + (-\sin x) = 1 - \sin x$$

Ecco un altro:

$$D[3x + \sin x - \cos x] = D[3x] + D[\sin x] - D[\cos x] = 3 + \cos x - (-\sin x) = 3 + \cos x + \sin x$$

Derivata del prodotto di due o più funzioni

Consideriamo $f(x) = g(x) \cdot l(x)$ e calcoliamo la derivata nel punto x_0 :

x	y
x_0	$g(x_0) \cdot l(x_0)$
$x_0 + h$	$g(x_0 + h) \cdot l(x_0 + h)$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) \cdot l(x_0 + h) - g(x_0) \cdot l(x_0)}{h}$$

Aggiungiamo e sottraiamo nel numeratore $g(x_0 + h) \cdot l(x_0)$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) \cdot l(x_0 + h) + g(x_0 + h) \cdot l(x_0) - g(x_0 + h) \cdot l(x_0) - g(x_0) \cdot l(x_0)}{h}$$

Ora raccogliamo $g(x_0 + h)$ e $l(x_0)$ da membri opportuni e sfruttiamo il teorema (non ancora dimostrato) secondo cui $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \cdot l(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} l(x)$, oltre a quello della somma di limiti già usato nelle precedenti dimostrazioni:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) [l(x_0 + h) - l(x_0)] + l(x_0) [g(x_0 + h) - g(x_0)]}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) [l(x_0 + h) - l(x_0)]}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{l(x_0) [g(x_0 + h) - g(x_0)]}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} g(x_0 + h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{l(x_0 + h) - l(x_0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} l(x_0) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = \\ &= g(x_0) \cdot D[l(x_0)] + l(x_0) \cdot D[g(x_0)] \end{aligned}$$

Pertanto possiamo concludere che:

$$D[g(x) \cdot l(x)] = D[g(x)] \cdot l(x) + g(x) \cdot D[l(x)]$$

Nel caso in cui si abbiano più di due funzioni (ma comunque in numero finito), dobbiamo derivare la prima e moltiplicarla per tutte le altre, derivare la seconda e moltiplicarla per le prime e per le altre, derivare la terza e moltiplicarla per le precedenti e

tutte le altre, derivare l'ennesima e moltiplicarla per tutte le precedenti:

$$D[f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_n(x)] = D[f_1(x)] \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_n(x) + D[f_2(x)] \cdot f_1(x) \cdot \dots \cdot f_n(x) + \dots + f'_n(x) \cdot \dots \cdot f_2(x) \cdot f_1(x)$$

In altre parole: "La derivata del prodotto di n fattori è uguale alla somma degli n prodotti che si ottengono derivando un fattore e lasciando gli altri non derivati".

Se un prodotto è dato da una costante per una funzione (come il "3x" del secondo degli esempi della derivata di una somma di funzioni), basta derivare la funzione senza coefficiente e moltiplicarla poi per lo stesso:

$$D[c \cdot f(x)] = c \cdot D[f(x)]$$

Infatti, ad esempio per $f(x) = 3x$:

$$D[3x] = D[3] \cdot x + D[x] \cdot 3 = 0 + 3 = 3$$

Esempio

Ecco un primo esempio:

$$\begin{aligned} D[x \cdot \ln^2 x] &= D[x \cdot \ln x \cdot \ln x] = D[x] \cdot \ln x + D[\ln x] \cdot x \ln x + D[\ln x] \cdot x \ln x = \\ &= \ln^2 x + \cancel{x \ln x} + \cancel{x \ln x} = \ln^2 x + 2 \ln x \end{aligned}$$

Ecco un altro:

$$\begin{aligned} D[2(x+2)^2(x^2+4x-3)] &= D[2(x^2+4x+4)(x^2+4x-3)] = \cancel{D[2] \cdot (x^2+4x+4)(x^2+4x-3)} + \\ &+ D(x^2+4x+4) \cdot 2(x^2+4x-3) + D(x^2+4x-3) \cdot 2(x^2+4x+4) = \\ &= 2(2x+4)(x^2+4x-3) + 2(2x+4)(x^2+4x+4) = 2(x+2)(x^2+4x-3+x^2+4x+4) = \\ &= 4(x+2)(2x^2+8x+1) \end{aligned}$$

Derivata del quoziente di due funzioni e derivata delle funzioni reciproche

Prendiamo sempre le nostre due funzioni $g(x)$ e $l(x)$. Il loro quoziente può essere inteso come prodotto tra la prima e il reciproco della seconda:

$$f(x) = \frac{g(x)}{l(x)} = g(x) \cdot \frac{1}{l(x)}$$

Per calcolare la derivata prima di $f(x)$ possiamo allora applicare la formula del prodotto:

$$D[f(x)] = D[g(x)] \cdot \frac{1}{l(x)} + g(x) \cdot D\left[\frac{1}{l(x)}\right]$$

Per trasformare questa formula, in sé già valida, in qualcosa di più "gradevole" dobbiamo riuscire a risolvere $D\left[\frac{1}{l(x)}\right]$. Essa è la derivata della funzione reciproca: $\frac{1}{l(x)}$ è reciproco di $m(x) = l(x)$. Utilizziamo la definizione di derivata per risolvere tale formula:

x	y
x_0	$\frac{1}{l(x_0)}$
x_0+h	$\frac{1}{l(x_0+h)}$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{l(x_0+h)} - \frac{1}{l(x_0)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{l(x_0) - l(x_0+h)}{l(x_0+h) \cdot l(x_0)}}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{l(x_0+h) \cdot l(x_0)} \cdot \frac{l(x_0+h) - l(x_0)}{h} \right) = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{l(x_0+h) \cdot l(x_0)} \right) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{l(x_0+h) - l(x_0)}{h} \right)
 \end{aligned}$$

Notiamo che $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{l(x_0+h) - l(x_0)}{h} = D[l(x)]$ e che per $\lim_{h \rightarrow 0} -\frac{1}{l(x_0+h) \cdot l(x_0)} = -\frac{1}{l^2(x)}$ perciò:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{l(x_0+h) \cdot l(x_0)} \right) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{l(x_0+h) - l(x_0)}{h} \right) = -\frac{1}{l^2(x)} \cdot D[l(x)] = -\frac{D[l(x)]}{l^2(x)}$$

Ad esempio, $D\left[\frac{1}{x^2}\right] = -\frac{1}{x^3}$

Combinando allora alla derivata del quoziente, possiamo ora trasformare la formula che abbiamo trovato sostituendo la derivata della funzione reciproca:

$$D[f(x)] = D[g(x)] \cdot \frac{1}{l(x)} + g(x) \cdot \left(-\frac{D[l(x)]}{l^2(x)} \right) = \frac{D[g(x)] \cdot l(x) - g(x) \cdot D[l(x)]}{l^2(x)}$$

Possiamo a questo punto, prima di proporre alcuni esempi, calcolare facilmente le derivate di due funzioni senza dover utilizzare la definizione di derivata:

- derivata di $f(x) = \lg x$:

$$\begin{aligned}
 D[f(x)] &= D[\lg x] = D\left[\frac{\ln x}{\ln 10}\right] = \frac{D[\ln x] \cdot \ln 10 - \ln x \cdot D[\ln 10]}{\ln^2 10} = \frac{\ln 10 \cdot \frac{1}{x} - \ln x \cdot 0}{\ln^2 10} = \frac{\ln 10}{x \ln^2 10} = \frac{1}{x \ln 10} \\
 &= \frac{\log x}{x} + \frac{\log^2 x}{x} = 1 + \log^2 x
 \end{aligned}$$

derivata di $f(x) = \operatorname{ctg} x$:

$$D[f(x)] = D[\operatorname{ctg} x] = D\left[\frac{\cos x}{\sin x}\right] = \frac{D[\cos x] \cdot \sin x - \cos x \cdot D[\sin x]}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$= -\frac{\sin^2 x}{\sin^4 x} - \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} = -1 - \operatorname{ctg}^2 x$$

Esempi:

Ecco qualche esempio che racchiude non solo le formule della derivata del quoziente, ma anche le formule precedenti:

$$D\left[\frac{\sin x}{x + \cos x}\right] = \frac{D[\sin x] \cdot (x + \cos x) - \sin x \cdot D[x + \cos x]}{(x + \cos x)^2} = \frac{x \cos x + \cos^2 x - \sin x + \sin^2 x}{(x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{x \cos x - \sin x + 1}{(x + \cos x)^2}$$

$$D\left[\frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}\right] = \frac{D[\ln x - 1] \cdot (\ln x + 1) - (\ln x - 1) \cdot D[\ln x + 1]}{(\ln x + 1)^2} = \frac{\frac{1}{x} - 1}{(\ln x + 1)^2} = \frac{1 - x}{x(\ln x + 1)^2}$$

$$D\left[\frac{e^x + 1}{2 - e^x}\right] = \frac{D[e^x + 1] \cdot (2 - e^x) - (e^x + 1) D[2 - e^x]}{(2 - e^x)^2} = \frac{2e^x - e^{2x} + e^x + e^x}{(2 - e^x)^2} = \frac{3e^x - e^{2x}}{(2 - e^x)^2}$$

$$D\left[\frac{1 - \operatorname{tg} x}{\sin x - \cos x}\right] = \frac{D[1 - \operatorname{tg} x] \cdot (\sin x - \cos x) - (1 - \operatorname{tg} x) D[\sin x - \cos x]}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= \frac{(-\operatorname{tg}^2 x - 1) \cdot (\sin x - \cos x) + (\operatorname{tg} x - 1) \cdot (\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= \frac{-\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos x} - \sin x + \cos x + \frac{\sin^2 x}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} - \cos x - \sin x}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= \frac{-\sin^3 x + \sin^2 x \cos x + \sin^2 x \cos x - \sin x \cos^2 x}{(\sin x - \cos x)^2} = \frac{-\sin^3 x + 2\sin^2 x \cos x - \sin x \cos^2 x}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{2\sin x}{\cos x} + 1 \right)}{(\sin x - \cos x)^2} = \frac{-\sin x (\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + 1)}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x (\operatorname{tg} x - 1)^2}{(\sin x - \cos x)^2} = \frac{-\sin x \left(\frac{\sin x - \cos x}{\cos x} \right)^2}{(\sin x - \cos x)^2} = \frac{-\sin x \cdot \frac{(\sin x - \cos x)^2}{\cos^2 x}}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= -\frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

Proponiamo ora un esempio la cui risoluzione ci permette di ripassare alcune regole studiate nel biennio, all'epoca della risoluzione di equazioni complete!

$$D\left[\frac{3x-1}{(4-5x)^2}\right] = \frac{D[3x-1] \cdot (4-5x)^2 - D[(4-5x)^2] \cdot (3x-1)}{(4-5x)^4}$$

$$= \frac{3(16 - 40x + 25x^2) - 2(4-5x) \cdot D[4-5x] \cdot (3x-1)}{(4-5x)^4}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{48 - 120x + 75x^2 (8-10x) \cdot (-5) \cdot (3x-1)}{(4-5x)^4} = \\
&= \frac{48 - 120x + 75x^2 + 5(24x - 8 - 30x^2 + 10x)}{(4-5x)^4} = \\
&= \frac{48 - 120x + 75x^2 + 120x - 40 - 150x^2 + 50x}{(4-5x)^4} = \\
&= \frac{-75x^2 + 50x + 8}{(4-5x)^4}
\end{aligned}$$

L'espressione al numeratore è di difficile scomposizione. Prima di comporre, facciamo però notare che nella risoluzione dell'esercizio abbiamo calcolato la derivata $D[(4-5x)^4]$, che contiene una funzione composta. Il calcolo della derivata della funzione composta verrà spiegato successivamente. Per ora ci limitiamo ad affermare che, svolgendo il quadrato all'interno delle parentesi quadre e calcolando la derivata della somma che si ottiene, si giunge allo stesso risultato presente nella risoluzione:

$$D[(4-5x)^4] = D[25x^2 - 40x + 16] = 50x - 40 = (-5) \cdot (8-10x)$$

Portiamo alla nostra espressione $-75x^2 + 50x + 8$. Per scomporre tale polinomio, riconduciamoci al caso generale $ax^2 + bx + c = 0$. Per trovare le due soluzioni dell'equazione usiamo la consueta formula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Otteniamo le due radici (cioè le soluzioni):

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Calcoliamo somma e prodotto di tali radici:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a} = -2$$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{\Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} = 2$$

Portiamo all'equazione generica $ax^2 + bx + c = 0$ e raccogliamo a :

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$$

Scopriamo nell'equazione $\frac{b}{a}$, che è la somma delle radici cambiata di segno, e $\frac{c}{a}$, che è il prodotto delle radici. Sostituiamo e riduciamo:

$$a\left[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2\right] = 0$$

$$a\left(x^2 - x_1x - x_2x + x_1 \cdot x_2\right) = 0$$

$$a[x(x-x_1) + x_2(x-x_1)] = 0$$

$$a(x-x_1)(x-x_2) = 0$$

Abbiamo scoperto la formula per scomporre un generico polinomio ax^2+bx+c , che abbia qualsiasi $a \neq 0$. Possiamo ora tornare all'esercizio e risolverlo. Scomponiamo dapprima $-75x^2+50x+8$ calcolando le due radici:

$$x_{1,2} = \frac{-25 \pm \sqrt{625+600}}{-75} = \frac{-25 \pm 25}{-75}$$

$$x_1 = \frac{4}{5} \quad x_2 = -\frac{2}{15}$$

Esercizio:

$$\begin{aligned} D\left(\frac{3x-1}{(4-5x)^2}\right) &= \frac{-75x^2+50x+8}{(4-5x)^4} = \frac{-75\left(x-\frac{4}{5}\right)\left(x+\frac{2}{15}\right)}{(4-5x)^4} = \frac{+75 \cdot \frac{1}{5} \cdot \cancel{(4-5x)} \cdot \left(x+\frac{2}{15}\right)}{(4-5x)^{4-1}} = \\ &= \frac{15x+2}{(4-5x)^3} \end{aligned}$$

Proviamo ancora a semplificare ulteriormente il calcolo della derivata. Prima di procedere con l'analisi della derivata, affermiamoci un ultimo istante sull'importanza di somma e prodotto delle radici. Apparebbero:

$$x_1+x_2 = 2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = p = \frac{c}{a}$$

È possibile conoscere il segno delle radici conoscendo i segni dei coefficienti e sfruttando $-\frac{b}{a}$ e $\frac{c}{a}$. Esistono, data ax^2+bx+c , qualche cosa riguardo al segno delle radici:

- se $\frac{c}{a} > 0$ e $-\frac{b}{a} < 0$, le due radici hanno segno concorde (il loro prodotto $\frac{c}{a}$ può essere positivo solo se i segni di x_1 e x_2 sono entrambi $+$ o entrambi $-$) e sono entrambe negative (la somma è negativa ed esse devono avere segni concordi);
- se $\frac{c}{a} > 0$ e $-\frac{b}{a} > 0$, le due radici hanno segno concorde (come nel caso precedente), ma sono entrambe positive (perché la somma è positiva e i segni devono essere concordi);
- se $\frac{c}{a} < 0$ e $-\frac{b}{a} < 0$, le due radici hanno segno discordo (una è < 0 in cui il loro prodotto è negativo) e quella in valore assoluto maggiore è negativa (affinché la somma sia negativa);

- 1 - se $a \leq 0$ e $-b > 0$, le due radici hanno segno discorde (come nel caso precedente) e quella maggiore in valore assoluto è positiva (affinché la loro somma sia positiva).

Riconducendo il nostro discorso all'equazione generale $ax^2+bx+c=0$, possiamo affermare che:

- ad ogni variazione tra i segni di due coefficienti consecutivi (a e b o b e c) corrisponde una soluzione positiva;
- ad ogni permanenza tra i segni di due coefficienti consecutivi (a e b o b e c) corrisponde una soluzione negativa.

Ciò è dovuto all'analisi su somma e prodotto delle radici fatta precedentemente. Tutto ciò che abbiamo detto è incluso nella cosiddetta Regola di Cartesio e permette di determinare, ad esempio, gli intervalli di positività e negatività delle soluzioni di un'equazione parametrica in relazione ai valori assunti dal parametro k .

Ad esempio, l'equazione $x^2+4x-5=0$ ha una soluzione positiva perché tra b e c c'è variazione di segno, e una soluzione negativa perché tra a e b c'è permanenza di segno. Inoltre, dato che $-\frac{b}{a} = -4$ e $\frac{c}{a} = -5$, oltre alla discordanza tra i segni delle radici, capiamo che quella maggiore in valore assoluto è negativa. Tutto ciò è confermato dalla risoluzione dell'equazione:

$$(x+5)(x-1)=0 \text{ da cui } x=-5 \vee x=1$$

Riprenderemo e svilupperemo la Regola di Cartesio quando ci occuperemo delle equazioni parametriche (nell'ambito di limiti, derivate, integrali e problemi).

Derivata della funzione composta

Limitiamoci ad esporre la regola di calcolo della derivata della funzione composta. Dato la funzione $f(x) = g\{h[i(l(x))]\}$ la sua derivata è data dal prodotto delle derivate delle funzioni composte in successione, partendo dalla più esterna e procedendo fino alla più interna:

$$f'(x) = g'\{h[i(l(x))]\} \cdot h'[i(l(x))] \cdot i'(l(x)) \cdot l'(x)$$